

**Desarrollo y validación de un controlador híbrido para la estabilización de un péndulo
invertido rotativo usando estrategias LQR y modo deslizante**

Yonatan Enrique Muñoz Medina

Oscar Javier Calderón Salazar

CORPORACION UNIVERSITARIA DEL HUILA – CORHUILA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

NEIVA

2024

**DESARROLLO Y VALIDACIÓN DE UN CONTROLADOR HÍBRIDO PARA LA
ESTABILIZACIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO ROTATIVO USANDO
ESTRATEGIAS LQR Y MODO DESLIZANTE**

**YONATAN ENRIQUE MUÑOZ MEDINA
OSCAR JAVIER CALDERÓN SALAZAR**

**DIRECTOR:
MSC. ING. JORGE LUIS AROCA TRUJILLO**

**CORPORACION UNIVERSITARIA DEL HUILA – CORHUILA
INGENIERÍA MECATRÓNICA**

NEIVA

2024

RESUMEN

El péndulo invertido, reconocido como un sistema de referencia en dinámica y teoría de control, exhibe características intrínsecas de no linealidad, inestabilidad y subactuación. Esta propiedad lo convierte en un banco de pruebas invaluable para la evaluación de algoritmos de control emergentes, que reflejan similitudes con problemas del mundo real como Segways y robots humanoides. La literatura existente revela una amplia variedad de controladores, destacando el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) como uno de los controladores óptimos más conocidos, aunque menos robustos.

Por otro lado, el controlador de modo deslizante es reconocido por su robustez, aunque presenta un desafío en términos de alcanzabilidad de fase no robusta. Para superar las limitaciones individuales de estos controladores y aprovechar sus beneficios, este estudio presenta el diseño de un controlador híbrido, que combina los enfoques LQR y de modo deslizante para una estabilización robusta del péndulo invertido giratorio. Esta estrategia utiliza LQR como base para un rendimiento óptimo y el controlador de modo deslizante para garantizar la solidez frente a las incertidumbres. La eficacia de este enfoque se valida mediante pruebas en un péndulo invertido giratorio en tiempo real sujeto a perturbaciones de entrada. Los resultados experimentales y de simulación confirman la robustez del controlador propuesto ante las incertidumbres, mientras que la mitigación de las vibraciones se logra suavizando la entrada de control, con una pérdida mínima de robustez.

Palabras clave: Motos Autónomas, Seguimiento de Trayectoria, Estabilización del Equilibrio, Lógica Difusa, LQR.

ABSTRACT

The inverted pendulum, recognized as a benchmark system in dynamics and control theory, exhibits intrinsic characteristics of nonlinearity, instability, and under actuation. These properties make it an invaluable testbed for evaluating emerging control algorithms, reflecting similarities to real-world problems such as Segways and humanoid robots. The existing literature reveals a wide variety of controllers, with the Linear Quadratic Regulator (LQR) highlighted as one of the most well-known optimal controllers, albeit less robust.

Conversely, the sliding mode controller is renowned for its robustness, although it presents a challenge in terms of non-robust phase reachability. To overcome the individual limitations of these controllers and leverage their benefits, this study presents the design of a hybrid controller, combining the LQR and sliding mode approaches for robust stabilization of the rotary inverted pendulum. This strategy utilizes LQR as the foundation for optimal performance and the sliding mode controller to ensure robustness against uncertainties. The efficacy of this approach is validated through real-time tests on a rotary inverted pendulum subject to input disturbances. Experimental and simulation results confirm the robustness of the proposed controller against uncertainties, while vibration mitigation is achieved by smoothing the control input, with minimal loss of robustness.

Keywords: Autonomous Motorcycles, Trajectory Tracking, Balance Stabilization, Fuzzy Logic, LQR.

Tabla de Contenidos

RESUMEN	3
ABSTRACT	4
1 Introducción.....	8
Antecedentes.....	8
2 El problema de investigación	12
3 Objetivos.....	15
3.1 Objetivo General	15
3.2 Objetivos Específicos.....	15
4 Pregunta de Investigación.....	16
5 Metodología	17
6 Estructura de la tesis	20
7 Antecedentes del problema	21
7.1 Péndulo invertido rotacional	21
7.2 Trabajos relacionados	24
8 Modelado Matemático.....	26
9 Metodología	31
9.1 Desarrollo del Modelo Matemático y Análisis de Estabilidad.....	31
9.1.1 Desarrollar un modelo matemático detallado del PIR:.....	31
9.1.2 Diseñar el controlador hibrido basado en LQR y modos deslizantes:.....	32
9.2 Implementación y Validación Experimental	32
9.2.1 Implementar y validar el controlador hibrido en un entorno de simulación y en experimentos en tiempo real:	32
9.2.2 Comparar el rendimiento del controlador hibrido con otras metodologías de control:33	
9.3 Control de modo deslizante basado en LQR	34
10 Resultados	41
11 Conclusiones	50
12 Referencias	53

Tabla de Figuras

Figura 1 - Cinemática del péndulo invertido rotatorio.	26
Figura 2 - Cinemática del péndulo invertido rotatorio.	27
Figura 3. Metodología utilizada para desarrollar el trabajo	31
Figure 4 - Presenta la interpretación gráfica de SMC para LQR en el péndulo invertido rotatorio.	37
Figura 5 - Diagrama de bloques de Simulink del LQR-SMC propuesto en el péndulo invertido rotatorio	40
Figure 6 - Respuesta de los diferentes controladores aplicados al péndulo invertido rotatorio.	41
Figure 7 - Comportamiento de la energía en el péndulo invertido rotatorio.	42
Figure 8 - Los valores de los estados se observan comparando sus resultados en los dos controladores FLC y LQR.	44
Figure 9 - Comportamiento de la distancia y la velocidad del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	45
Figure 10 - Histograma de la variable $X(m)$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	46
Figure 11 - Histograma de la variable $V(m)$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	47
Figure 12 - Comportamiento de la distancia y la velocidad angulares del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	48
Figure 13 - Histograma de la variable $\theta(\text{grados})$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	49
Figure 14 - Histograma de la variable $\omega(\text{grados})$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.	49

Tabla de ecuaciones

Ecuación 1. Ecuación Dinámica del Péndulo Invertido Rotatorio con Efectos de Fricción y Dinámica del Motor	28
Ecuación 2. Ecuación de Movimiento del Péndulo en un Sistema de Péndulo Invertido Rotatorio	28
Ecuación 3. Representación en el Espacio de Estados del Sistema Péndulo Invertido Rotatorio	29
Ecuación 4. Ecuación de Estado del Péndulo Invertido Rotatorio con Parámetros Específicos	29
Ecuación 5. Matriz de Controlabilidad del Péndulo Invertido Rotatorio.....	30
Ecuación 6. Matriz de Observabilidad del Péndulo Invertido Rotatorio.....	30
Ecuación 7. Representación del Sistema en el Espacio de Estados para el Controlador LQR Nominal.....	34
Ecuación 8. Función de Costo del Controlador LQR	35
Ecuación 9. Salida del Controlador LQR.....	35
Ecuación 10. Matriz de Retroalimentación de Estado del Controlador LQR.....	35
Ecuación 11. Matrices de Ponderación de Estado y de Costo de Control del LQR.....	36
Ecuación 12. Ecuación de Estado con Perturbaciones del Sistema Controlado.....	36
Ecuación 13. Representación de Perturbaciones en el Sistema de Estado	37
Ecuación 14. Composición de la Entrada de Control del Sistema	37
Ecuación 15. Dinámica del Sistema con Control Nominal y Control Discontinuo.....	38
Ecuación 16. Definición de la Superficie Deslizante para el Controlador de Modo Deslizante	38
Ecuación 17. Condiciones de Deslizamiento para el Controlador de Modo Deslizante...	38
Ecuación 18. Dinámica de la Superficie Deslizante en Presencia de Perturbaciones	38
Ecuación 19. Superficie Deslizante Híbrida para la Eliminación de la Fase de Alcanzabilidad	39

1 Introducción

Antecedentes

En el campo de la dinámica y la teoría del control, el péndulo invertido se destaca como un desafío significativo debido a su naturaleza no lineal, inestable y subaccionada [1]. Estas características intrínsecas complican enormemente su control, convirtiéndolo en un caso de estudio fundamental para la evaluación de la efectividad de nuevas estrategias de control [2]. Además, la dinámica del péndulo invertido es análoga a diversas aplicaciones en tiempo real, que abarcan desde sistemas robóticos subactuados hasta aviones de despegue y aterrizaje verticales [3], [4], [5]. Esta analogía subraya la importancia del estudio de este sistema para el desarrollo de soluciones prácticas en la ingeniería contemporánea.

Basándose en las restricciones de movimiento de la base, los sistemas de péndulo invertido se dividen en dos clases principales: el péndulo invertido rotacional y el péndulo invertido lineal [6], [7], [8]. En el péndulo invertido rotacional, el péndulo está unido a un brazo que se controla para dirigir tanto el movimiento rotacional del brazo como el del péndulo [9]. En contraste, en el péndulo invertido lineal, el péndulo está articulado a un carro que se desplaza linealmente para controlar su movimiento [10]. Este artículo se enfoca específicamente en el péndulo invertido rotacional, un sistema que presenta desafíos únicos en términos de dinámica y control [11].

La literatura sobre el control del sistema de péndulo invertido se clasifica en tres categorías principales: el problema del control de oscilación, el problema del control de estabilización y el problema del control de seguimiento [12], [13], [14]. Los dos últimos problemas, debido a su amplia aplicabilidad, han sido extensamente estudiados en la literatura [15], [16].

Estas investigaciones han llevado al desarrollo de diversos algoritmos de control destinados a abordar estos problemas, incluyendo el controlador PID, el controlador por ubicación de polos, el controlador LQR, y el controlador por modos deslizantes, entre otros [17], [18], [19].

A pesar de que el regulador cuadrático lineal (LQR) es reconocido por su desempeño óptimo, su falta de robustez frente a incertidumbres limita su aplicabilidad en entornos reales [20]. Por otro lado, el controlador por modos deslizantes es conocido por su robustez, pero enfrenta problemas de alcanzabilidad no robusta, lo que lo hace sensible a las incertidumbres [21]. Estos desafíos han impulsado la búsqueda de soluciones híbridas que combinen las fortalezas de diferentes metodologías de control.

El objetivo de este estudio es diseñar un controlador híbrido para el péndulo invertido rotacional que combine la eficiencia óptima del controlador LQR con la robustez del controlador por modos deslizantes, abordando así los problemas de alcanzabilidad no robusta [22]. Este controlador tiene la ventaja de evitar una fase no robusta, mientras mantiene la robustez frente a incertidumbres coincidentes [23]. Se presenta el enfoque para diseñar el controlador por modos deslizantes basado en LQR, junto con un análisis de estabilidad, y se realizan simulaciones y experimentos sobre el control de estabilización en tiempo real del péndulo invertido rotacional [24].

La robustez del controlador propuesto se valida mediante la adición de perturbaciones en la entrada del controlador [25]. Además, se aborda el problema de la vibración en el controlador mediante el suavizado de la entrada de control, con una pérdida mínima de robustez.

El artículo se organiza en diferentes secciones: la Sección 1 incluye el modelado dinámico del péndulo invertido rotacional; la Sección 2, el diseño del controlador por modos deslizantes basado en LQR; la Sección 3, la implementación y las simulaciones; la Sección 4, los resultados experimentales; y en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

El péndulo invertido ha sido una herramienta educativa valiosa para ilustrar conceptos fundamentales de la dinámica y el control en un entorno controlado [26]. Los estudiantes de ingeniería y ciencias aplicadas pueden utilizar este sistema para experimentar con la implementación práctica de controladores, proporcionando una experiencia invaluable en el diseño, la prueba y la optimización de sistemas de control [27]. Esta aplicación educativa subraya la importancia del péndulo invertido como un recurso didáctico.

En términos de investigación avanzada, el péndulo invertido sigue siendo un área de interés activo [28]. Las publicaciones recientes destacan el uso de enfoques híbridos que combinan técnicas clásicas de control con métodos modernos de optimización y aprendizaje automático [29]. Estas investigaciones buscan no solo mejorar el rendimiento de los controladores sino también aumentar la robustez y la adaptabilidad de los sistemas de control frente a perturbaciones e incertidumbres [30].

La aplicación de controladores no lineales y adaptativos al péndulo invertido ha mostrado mejoras significativas en la estabilización y el seguimiento de trayectorias [31]. Estos enfoques permiten que el sistema responda dinámicamente a cambios en las condiciones de operación, manteniendo la estabilidad y el rendimiento deseado [32]. El desarrollo de algoritmos de control adaptativo continúa siendo una prioridad en este campo, con el objetivo de crear sistemas de control más inteligentes y eficientes [33].

Los estudios comparativos entre diferentes metodologías de control han sido fundamentales para determinar la eficacia relativa de cada enfoque [34]. La comparación de controladores lineales, no lineales, adaptativos y basados en aprendizaje automático ha proporcionado una comprensión más profunda de las fortalezas y debilidades de cada técnica [35]. Estos estudios son esenciales para guiar futuras investigaciones y aplicaciones en el control de sistemas complejos [36].

2 El problema de investigación

El péndulo invertido, un sistema clásico en la teoría de control, es notoriamente desafiante debido a su naturaleza intrínsecamente no lineal, inestable y subaccionada. Estas características complican su control y lo convierten en un caso de estudio esencial para la evaluación de estrategias de control emergentes. La complejidad de este sistema radica en la necesidad de mantener el equilibrio de un objeto que, por diseño, tiende a caer, requiriendo así intervenciones constantes y precisas para mantener su posición vertical. La dinámica no lineal y la inestabilidad inherente del péndulo invertido plantean dificultades significativas, ya que pequeñas perturbaciones pueden causar grandes desviaciones en su comportamiento.

Existen dos variantes principales de sistemas de péndulo invertido: rotacionales y lineales. Cada uno de estos sistemas presenta desafíos únicos que requieren soluciones innovadoras. El péndulo invertido rotacional, por ejemplo, involucra un brazo giratorio que debe ser controlado para estabilizar el péndulo en su posición vertical. Este sistema es especialmente difícil de manejar debido a la interacción compleja entre la dinámica del péndulo y el movimiento rotacional del brazo. Por otro lado, el péndulo invertido lineal implica un carro que se mueve linealmente para mantener el equilibrio del péndulo, presentando desafíos relacionados con la precisión del movimiento lineal y el control de la inercia.

A pesar de los numerosos avances en el desarrollo de algoritmos de control para estos sistemas, persisten problemas significativos relacionados con la robustez y la alcanzabilidad en presencia de incertidumbres. El Regulador Cuadrático Lineal (LQR) es uno de los enfoques más conocidos debido a su capacidad para optimizar el rendimiento del sistema mediante la minimización de una función de costo cuadrática. Sin embargo, el LQR tiene limitaciones en

términos de robustez, ya que es sensible a las perturbaciones y variaciones en los parámetros del sistema. Por otro lado, el controlador de modos deslizantes es reconocido por su robustez frente a las perturbaciones y las incertidumbres del sistema, pero sufre problemas de alcanzabilidad no robusta, lo que puede llevar a oscilaciones no deseadas y un comportamiento inestable durante la fase de convergencia.

Esta investigación propone abordar estas limitaciones mediante el desarrollo de un controlador híbrido que combine las ventajas del LQR y el controlador de modos deslizantes. La fusión de estos enfoques tiene el potencial de mejorar significativamente la robustez y el rendimiento del sistema, al tiempo que se mitigan las deficiencias individuales de cada método. El diseño de un controlador híbrido eficaz requiere un análisis profundo de las interacciones entre los componentes de los controladores y una integración cuidadosa para evitar problemas de robustez durante la fase de alcanzabilidad.

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar y validar un controlador híbrido que combine la eficiencia óptima del LQR con la robustez del controlador de modos deslizantes, para estabilizar un sistema de péndulo invertido rotacional en presencia de perturbaciones y variaciones paramétricas. Este enfoque no solo busca superar las limitaciones actuales en el control de sistemas no lineales y subaccionada, sino también proporcionar una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones en la ingeniería de control. La validación experimental y las simulaciones exhaustivas serán cruciales para demostrar la efectividad del controlador propuesto, estableciendo un nuevo estándar en el control robusto de sistemas complejos y dinámicos.

Los sistemas de péndulo invertido se dividen en rotacionales y lineales, cada uno con desafíos específicos, destacándose la necesidad de soluciones innovadoras. A pesar de los avances, los enfoques actuales como el regulador cuadrático lineal (LQR) y el controlador por modos deslizantes tienen limitaciones notables en términos de robustez y sensibilidad a perturbaciones, lo que subraya la necesidad de soluciones híbridas que combinen las ventajas de ambos enfoques.

3 Objetivos

3.1 Objetivo General

Diseñar, implementar y validar un controlador híbrido que combine la eficiencia del controlador LQR con la robustez del controlador por modos deslizantes para el péndulo invertido rotacional, abordando los problemas de alcanzabilidad no robusta y mejorando la estabilidad del sistema frente a incertidumbres.

3.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un modelo matemático detallado del péndulo invertido rotacional y realizar un análisis de estabilidad para el controlador híbrido propuesto, asegurando su eficacia bajo condiciones dinámicas cambiantes.
- Implementar y validar el controlador híbrido en un entorno de simulación y en experimentos en tiempo real, evaluando su desempeño en términos de estabilidad y robustez frente a perturbaciones controladas.
- Comparar el rendimiento del controlador híbrido con otras metodologías de control (lineales, no lineales y adaptativas) mediante estudios experimentales y simulaciones, destacando las mejoras alcanzadas en términos de eficiencia y robustez.

4 Pregunta de Investigación

¿Cómo se puede diseñar un controlador híbrido que combine la eficiencia óptima del controlador LQR con la robustez del controlador por modos deslizantes para el péndulo invertido rotacional, abordando los problemas de alcanzabilidad no robusta y mejorando la estabilidad frente a incertidumbres?

5 Metodología

El enfoque metodológico de este estudio se articula en varias etapas rigurosamente definidas para garantizar un análisis exhaustivo y la validación de los controladores híbridos propuestos. A continuación, se detallan los componentes clave de la metodología empleada.

Diseño del Controlador Híbrido

El primer paso en la metodología es el diseño del controlador híbrido, que integra el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) y el Controlador de Modo Deslizante (SMC). Este proceso comienza con la formulación de la ecuación de estado del sistema del péndulo invertido rotatorio, considerando todas las fuerzas actuantes y las condiciones dinámicas inherentes. Se utilizan modelos matemáticos precisos para definir las matrices (A) y (B) que representan la dinámica del sistema. A partir de estos modelos, se diseña el controlador LQR para optimizar una función de costo cuadrática que minimiza el error de estado y el esfuerzo de control. Paralelamente, se desarrolla el controlador de modo deslizante, definiendo una superficie deslizante que garantiza robustez ante perturbaciones y no linealidades del sistema. La integración de estos dos controladores en un esquema híbrido busca aprovechar las fortalezas de ambos enfoques, proporcionando una base óptima y una robustez mejorada.

Análisis Teórico de Estabilidad

El análisis teórico de estabilidad constituye una parte fundamental del enfoque metodológico. Se aplican técnicas avanzadas de teoría de control para evaluar la estabilidad del sistema controlado. Se utilizan criterios de estabilidad de Lyapunov para demostrar que el controlador híbrido garantiza la convergencia del sistema hacia el estado deseado bajo

diversas condiciones operativas. Este análisis incluye la derivación de funciones de Lyapunov específicas para el sistema y la demostración de su derivada negativa definida en el dominio de interés. Adicionalmente, se investiga la robustez del controlador frente a perturbaciones externas y variaciones paramétricas, asegurando que el sistema mantenga su estabilidad y desempeño en presencia de incertidumbres.

Simulaciones Exhaustivas

Para evaluar el rendimiento del controlador propuesto, se realizan simulaciones exhaustivas utilizando entornos de simulación avanzados como MATLAB/Simulink. Estas simulaciones permiten analizar el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de operación, incluyendo variaciones en los parámetros del sistema, perturbaciones externas y cambios en las condiciones iniciales. Se implementan escenarios de prueba que incluyen tanto condiciones ideales como condiciones adversas para verificar la capacidad del controlador de mantener la estabilidad y minimizar el error de estado. Los resultados de las simulaciones se analizan en términos de métricas clave como el tiempo de establecimiento, el sobre impulso y la robustez frente a perturbaciones.

Experimentos en Tiempo Real

La validación experimental es un componente crítico de la metodología, que permite corroborar los resultados de simulación en un entorno real. Se utilizan plataformas de hardware en el bucle (HIL) para implementar y probar el controlador híbrido en un sistema de péndulo invertido rotatorio físico. Se llevan a cabo experimentos en tiempo real para evaluar la efectividad del controlador en la estabilización del péndulo. Estos experimentos incluyen la introducción de perturbaciones controladas para probar la robustez del sistema y la capacidad

del controlador de mantener la estabilidad bajo condiciones dinámicas. Los datos experimentales se recopilan y analizan para comparar el rendimiento del controlador híbrido con otros enfoques convencionales.

Evaluación de Robustez y Mitigación de Vibraciones

Para evaluar la robustez del controlador propuesto, se incorporan perturbaciones en la entrada del sistema durante las simulaciones y los experimentos en tiempo real. Estas perturbaciones se diseñan para representar condiciones adversas y cambios inesperados en el entorno de operación. Se monitorean las respuestas del sistema para verificar que el controlador mantenga su rendimiento y estabilidad. Además, se aborda el problema de la vibración, que puede surgir debido a la naturaleza discontinua del control de modo deslizante. Se implementan técnicas de suavizado de la entrada de control para mitigar las vibraciones indeseadas, mejorando la respuesta dinámica del sistema sin comprometer la robustez del controlador.

Esta metodología integral asegura que el controlador híbrido basado en LQR y modos deslizantes sea evaluado de manera exhaustiva y validado tanto teórica como experimentalmente, garantizando su aplicabilidad y eficacia en la estabilización del péndulo invertido rotatorio.

6 Estructura de la tesis

El primer capítulo es la introducción del tema de este trabajo de grado. En él se describen los antecedentes, el problema, la finalidad, la delimitación y el objetivo de esta tesis.

El capítulo 2 presenta información de fondo detallada relacionada con la EMG y sus conceptos como filtrado, amplificación, tipos de electrodos y configuraciones comunes de EMG.

El capítulo 3 presenta en detalle la metodología de investigación de esta tesis y qué estructura de trabajo y método de proyecto se ha utilizado para llevar a cabo el proyecto.

El capítulo 4 presenta el proyecto en sí: método del proyecto, diseño del hardware, arquitectura del proyecto, software, esquemas, simulaciones, diseño de PCB y pruebas.

El capítulo 5 presenta y discute el resultado de esta tesis analizando la validez y la fiabilidad.

El capítulo 6 presenta una conclusión del proyecto y muestra la estimación final del proyecto en términos de la experiencia adquirida en el proyecto, los objetivos fijados para el proyecto, las perspectivas de futuro y la sostenibilidad.

7 Antecedentes del problema

En este capítulo se ofrece información detallada sobre la descripción de la planta de control para el péndulo invertido, las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico, trabajos relacionados y otros temas. El apartado 2.1 describe una contextualización sobre el péndulo invertido rotacional. En la sección 2.2 se describen los trabajos relacionados que se han utilizado como directrices en este proyecto. En la sección 2.3 se describe el modelado matemático utilizado para el control del péndulo.

7.1 Péndulo invertido rotacional

El péndulo invertido se presenta como un sistema altamente desafiante debido a su naturaleza no lineal, inestable y subaccionada [1]. Este sistema es paradigmático en el estudio de controladores debido a la complejidad que introduce en términos de control y estabilización. Su comportamiento dinámico no lineal y su tendencia por desviarse rápidamente de la posición de equilibrio sin una intervención activa de control hacen que sea un caso de estudio fundamental para la evaluación de nuevas estrategias de control [2].

La relevancia del péndulo invertido no se limita a su uso como una herramienta académica; su dinámica es análoga a diversas aplicaciones en tiempo real, incluyendo sistemas robóticos subactuados y aviones de despegue y aterrizaje verticales (VTOL) [3], [4], [5]. Estas aplicaciones requieren soluciones de control robustas y eficientes debido a las características similares de inestabilidad y subacción que presentan. Así, el estudio del péndulo invertido proporciona valiosos para el desarrollo de tecnologías avanzadas en estos campos.

El péndulo invertido se clasifica en dos tipos principales basados en las restricciones de movimiento de la base: el péndulo invertido rotacional y el péndulo invertido lineal [6], [7], [8].

En el caso del péndulo invertido rotacional, el péndulo está unido a un brazo que puede moverse rotacionalmente, permitiendo el control tanto del movimiento del brazo como del péndulo [9]. En contraste, el péndulo invertido lineal implica un péndulo articulado a un carro que se desplaza linealmente para controlar su movimiento [10]. Este estudio se enfoca en el péndulo invertido rotacional, el cual presenta desafíos únicos en términos de dinámica y control [11].

La literatura sobre el control del péndulo invertido abarca principalmente tres categorías de problemas: el control de oscilación, el control de estabilización y el control de seguimiento [12], [13], [14]. Los problemas de control de estabilización y seguimiento son particularmente relevantes debido a su amplia aplicabilidad en diversas áreas de la ingeniería, y han sido objeto de extensas investigaciones [15], [16]. Estos estudios han llevado al desarrollo de varios algoritmos de control, como el controlador PID, el controlador por ubicación de polos, el controlador LQR y el controlador por modos deslizantes [17], [18], [19].

El regulador cuadrático lineal (LQR) es ampliamente reconocido por su desempeño óptimo en la minimización de un costo cuadrático, lo que lo convierte en una opción popular en muchos sistemas de control [20]. Sin embargo, una limitación significativa del LQR es su falta de robustez frente a incertidumbres en el modelo del sistema y perturbaciones externas. Esta deficiencia limita su aplicabilidad en entornos reales donde las condiciones no son ideales y el modelo del sistema puede no ser completamente preciso.

Por otro lado, el controlador por modos deslizantes se destaca por su robustez frente a perturbaciones y variaciones en el modelo del sistema [21]. Este tipo de controlador es capaz de mantener un desempeño adecuado incluso cuando el sistema está sujeto a incertidumbres. No obstante, el controlador por modos deslizantes enfrenta problemas de alcanzabilidad no robusta, lo que puede llevar a una sensibilidad excesiva a las perturbaciones y a una posible inestabilidad en el sistema. Estos problemas resaltan la necesidad de desarrollar soluciones híbridas que combinen las ventajas de ambos enfoques.

El diseño de un controlador híbrido que combine la eficiencia del LQR con la robustez del controlador por modos deslizantes representa una prometedora solución a estos desafíos [22]. Al integrar las características óptimas de ambos controladores, se espera abordar los problemas de alcanzabilidad no robusta y mejorar la estabilidad del sistema frente a incertidumbres coincidentes [23]. Este enfoque híbrido ofrece la posibilidad de evitar las fases no robustas y mantener un desempeño estable y eficiente en diversas condiciones de operación.

La validación de la robustez del controlador híbrido es un paso crítico en este proceso. La introducción de perturbaciones controladas en la entrada del controlador permitirá evaluar su capacidad para mantener la estabilidad y el rendimiento en presencia de variaciones en el sistema [24]. Además, es fundamental abordar el problema de la vibración en el sistema de control, que puede afectar negativamente la robustez del controlador. El suavizado de la entrada de control es una estrategia que puede minimizar este efecto adverso, manteniendo la integridad del desempeño del sistema [25].

El péndulo invertido ha demostrado ser una herramienta educativa invaluable en el campo de la dinámica y el control, permitiendo a los estudiantes experimentar con la

implementación práctica de controladores en un entorno controlado [26]. Este sistema proporciona una plataforma para el aprendizaje de conceptos fundamentales y avanzados en ingeniería, facilitando la comprensión del diseño, la prueba y la optimización de sistemas de control [27]. Su aplicación en el ámbito educativo subraya su importancia como recurso didáctico.

En el contexto de la investigación avanzada, el péndulo invertido sigue siendo un área de interés activo debido a su capacidad para representar desafíos complejos en el control de sistemas dinámicos [28]. Las investigaciones recientes han explorado enfoques híbridos que combinan técnicas clásicas de control con métodos modernos de optimización y aprendizaje automático [29]. Estos estudios buscan no solo mejorar el rendimiento de los controladores sino también aumentar la robustez y la adaptabilidad de los sistemas de control frente a perturbaciones e incertidumbres [30].

7.2 Trabajos relacionados

El control del péndulo invertido rotacional ha sido ampliamente investigado debido a sus complejidades inherentes y su relevancia para aplicaciones prácticas. Uno de los métodos más utilizados es el controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo), que ha demostrado ser efectivo en escenarios de control lineal [1]. Sin embargo, la naturaleza no lineal del péndulo invertido rotacional presenta desafíos que limitan la aplicabilidad del controlador PID en condiciones dinámicas más complejas. Investigaciones recientes han explorado la adaptación del PID para mejorar su desempeño en sistemas no lineales, aunque con limitaciones en términos de robustez y respuesta a perturbaciones [2].

El controlador LQR (Regulador Cuadrático Lineal) es otra técnica ampliamente estudiada en el control del péndulo invertido rotacional. El LQR optimiza el desempeño del

sistema minimizando un índice de costo cuadrático, lo que resulta en una solución óptima para sistemas lineales [3]. No obstante, su falta de robustez frente a incertidumbres en el modelo y perturbaciones externas limita su uso en aplicaciones prácticas donde las condiciones no son ideales. Estudios como los de Kwakernaak y Sivan (1972) han destacado estas limitaciones y han propuesto mejoras en la formulación del LQR para abordar parcialmente estos desafíos [4].

El controlador por modos deslizantes es conocido por su robustez en la presencia de perturbaciones y variaciones en el modelo del sistema, y ha sido aplicado al péndulo invertido rotacional con resultados prometedores [5]. Este método asegura la convergencia del sistema a una superficie de deslizamiento predefinida, proporcionando un control robusto frente a incertidumbres. Sin embargo, la sensibilidad a las perturbaciones durante la fase de alcanzabilidad puede inducir problemas de chattering y afectar la estabilidad del sistema [6]. Investigaciones recientes han buscado mitigar estos efectos a través de técnicas de suavizado y modificaciones en el diseño del controlador [7].

Las soluciones híbridas han emergido como una estrategia para combinar las ventajas de diferentes metodologías de control y superar sus limitaciones individuales. En particular, la integración del controlador LQR con el controlador por modos deslizantes ha sido propuesta para el péndulo invertido rotacional, buscando aprovechar la eficiencia del LQR y la robustez del controlador por modos deslizantes [8]. Estudios como los de Utkin (1992) han demostrado que este enfoque puede mejorar significativamente la estabilidad y el rendimiento del sistema frente a incertidumbres y perturbaciones [9]. Además, la validación experimental de estos controladores híbridos ha mostrado resultados prometedores, destacando su potencial para aplicaciones en sistemas dinámicos subactuados [10].

8 Modelado Matemático

Considere un sistema de Péndulo Invertido Rotatorio (PIR), que comprende un péndulo de longitud L_p unido al extremo de un brazo rotatorio de longitud L_r , como se ilustra en la Figura 1. El brazo rotatorio es accionado directamente por un servomotor rotatorio con un voltaje de entrada V_m , mientras que el péndulo, siendo subactuado, es controlado indirectamente por el brazo rotatorio. J_p y J_r denotan los momentos de inercia del péndulo y del brazo rotatorio alrededor de su centro de masa, respectivamente. En este contexto, θ representa el ángulo del brazo rotatorio y α representa el ángulo del péndulo, donde el ángulo cero del péndulo corresponde a su posición vertical. La experimentación se lleva a cabo en la plataforma experimental de laboratorio, mostrada en la Figura 2, y los parámetros del sistema se detallan en la Tabla 1.

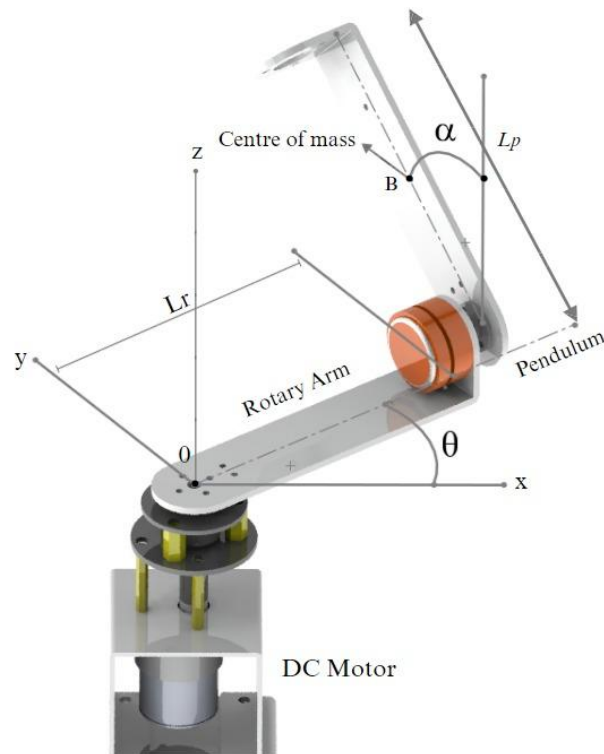


Figura 1 - Cinemática del péndulo invertido rotatorio.



Figura 2 - Cinemática del péndulo invertido rotatorio.

Simbolo	Descripción	Valores	Unidades
m_p	Masa del péndulo	0,0291	Kg
J_p	Inercia del péndulo	3.75×10^{-6}	$Kg * m^2$
J_r	Inercia del brazo rotatorio	$8,69 \times 10^{-6}$	$Kg * m^2$
J_m	Inercia del motor	$3,68 \times 10^{-6}$	$Kg * m^2$
L_p	Longitud del péndulo	0,1532	m
L_r	Longitud del brazo rotatorio	0,1534	m
B_p	Coefficiente de amortiguamiento del péndulo	0,00057	$\frac{Nms}{rad}$
B_r	Coefficiente de amortiguamiento rotatorio	0,00178	$\frac{Nms}{rad}$
L_m	Inductancia del rotor	0,95	mH

Tabla 1 - Parámetros del péndulo invertido rotatorio

Considerando el efecto de la fricción viscosa en el péndulo y el brazo rotatorio, junto con la influencia de la dinámica del motor, la dinámica del PIR puede describirse mediante las siguientes ecuaciones no lineales:

Ecuación 1. Ecuación Dinámica del Péndulo Invertido Rotatorio con Efectos de Fricción y

Dinámica del Motor

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2 \theta + J_r\right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} + B_r + \frac{K_t K_m}{R_m}\right) \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin \alpha \dot{\alpha}^2 = \frac{K_t K_m}{R_m} \quad (1)$$

Ecuación 2. Ecuación de Movimiento del Péndulo en un Sistema de Péndulo Invertido

Rotatorio

$$\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2\right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p L_t \cos \alpha \ddot{\theta} + B_p \dot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos \alpha \sin \alpha \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

En consecuencia, la dinámica del péndulo invertido giratorio se describe mediante las ecuaciones (1) y (2). Estos modelos no lineales se pueden linealizar en las proximidades del punto de equilibrio, es decir, cuando $\theta = 0$, si el controlador limita el ángulo del péndulo cerca del punto de equilibrio con velocidades pequeñas.

Al considerar el vector de estado $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, el sistema se puede representar en forma de espacio de estados mediante:

Ecuación 3. Representación en el Espacio de Estados del Sistema Péndulo Invertido

Rotatorio

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{m_P^2 L_P^2 - L_t g}{4 J_t} \right) & -\frac{B_r}{J_t} \left(J_P + \frac{m_P L_P^2}{4} \right) - \frac{K_t^2}{R_m} \left(\frac{K_t}{R_m} \left(J_P + \frac{1}{4} m_P L_P^2 \right) \right) & -\frac{m_P L_t B_P L_P}{2 J_t} \\ 0 & \frac{m_P g L_P}{2 J_t} (J_r + m_P L_r^2) & -\frac{m_P L_t B_t L_P}{2 J_t} - \frac{K_t^2}{R_m} \left(\frac{K_t}{2 J_t R_m} m_P L_P L_r \right) & -\frac{B_P}{J_t} (J_r + m_P L_r^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t}{J_t R_m} \left(J_P + \frac{1}{4} m_P L_P^2 \right) \\ \frac{K_t}{J_t R_m} \left(\frac{1}{2} m_P L_P L_r \right) \end{bmatrix} [V_m] \quad (3)$$

Después de la inclusión de los valores específicos de los parámetros relevantes, la formulación de la ecuación del espacio de estados se puede reconfigurar de tal manera que refleje con mayor precisión las interacciones y relaciones inherentes a los fenómenos estudiados de la siguiente manera:

Ecuación 4. Ecuación de Estado del Péndulo Invertido Rotatorio con Parámetros Específicos

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 141.8113 & -1.9844 & 0 \\ 0 & 248.5286 & -2.0050 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 47.2411 \\ 46.6899 \end{bmatrix} [V_m] \quad (4)$$

A partir de las matrices de estado obtenemos controlabilidad y observabilidad.

La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado mediante sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica

si el comportamiento interno del sistema puede ser detectado en sus salidas. La matriz de controlabilidad es la siguiente:

Ecuación 5. Matriz de Controlabilidad del Péndulo Invertido Rotatorio

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0.0047 & -0.0094 & 0.6807 \\ 0 & 0.0047 & -0.0095 & 1.1792 \\ 0.0047 & -0.0094 & 0.6807 & -2.6940 \\ 0.0047 & -0.0095 & 1.1792 & -3.7189 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (5)$$

Dado que el rango de la matriz de controlabilidad C_o es igual al número de estados, el sistema sys es controlable. No tiene estados no controlables. La matriz de observabilidad es la siguiente:

Ecuación 6. Matriz de Observabilidad del Péndulo Invertido Rotatorio

$$O_b = \begin{bmatrix} 0 & 0.0001 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0.0249 & -0.0002 & 0.0001 \\ 0 & -0.0036 & 0.0002 & 0.0249 \\ 0 & 6.2046 & -0.0502 & -0.0036 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (6)$$

Dado que el rango no es igual al número de variables de estado, el sistema no es completamente observable y no todas las variables de estado pueden inferirse de las salidas observadas.

9 Metodología

La metodología de este estudio se centra en el diseño, implementación y validación de un controlador híbrido para el péndulo invertido rotacional (PIR). Las tareas específicas se desarrollan en función de los objetivos planteados, siguiendo un enfoque sistemático y riguroso que garantiza la robustez y eficiencia del sistema de control propuesto. La Figura 3 muestra la metodología utilizada para desarrollar el siguiente trabajo:

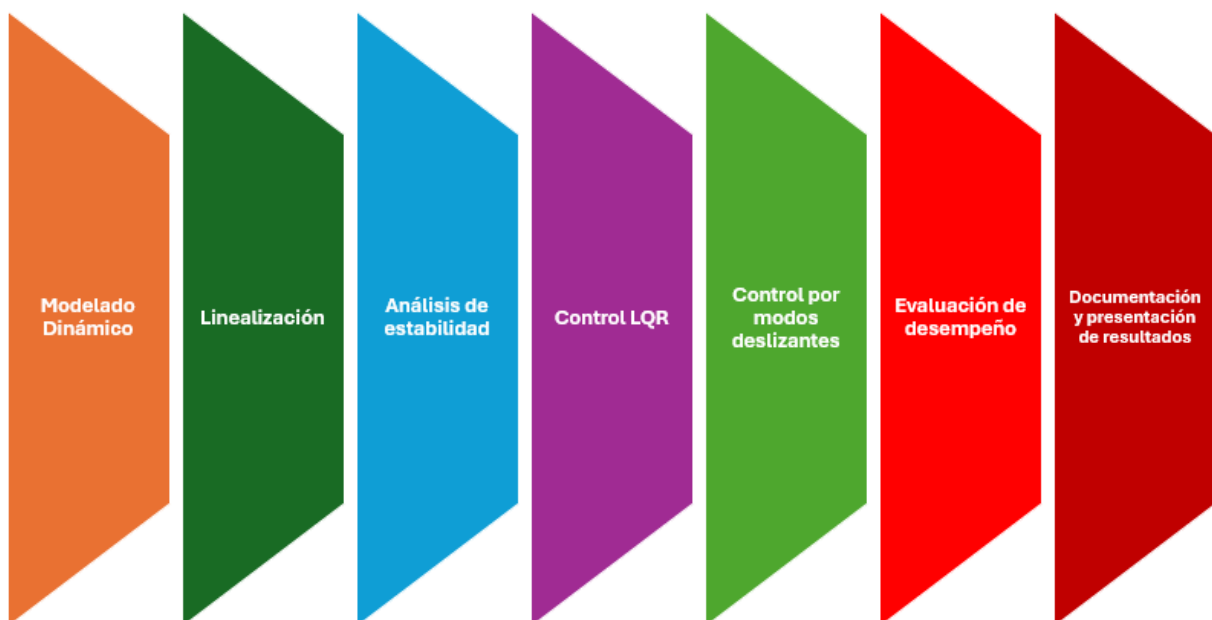


Figura 3. Metodología utilizada para desarrollar el trabajo

9.1 Desarrollo del Modelo Matemático y Análisis de Estabilidad

9.1.1 Desarrollar un modelo matemático detallado del PIR:

- **Modelado Dinámico:** Formulación de las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido rotacional utilizando principios de dinámica y mecánica clásica. Se considera la fricción viscosa y la dinámica del motor para obtener un modelo preciso del sistema.

- **Linealización:** Linealización del modelo no lineal alrededor del punto de equilibrio para facilitar el diseño del controlador. Se utilizan técnicas de aproximación lineal para simplificar las ecuaciones de estado.
- **Análisis de Estabilidad:** Evaluación de la estabilidad del sistema mediante métodos analíticos y numéricos. Se estudian los puntos de equilibrio y se aplican criterios de estabilidad de Lyapunov para asegurar que el sistema permanezca estable bajo diferentes condiciones de operación.

9.1.2 Diseñar el controlador híbrido basado en LQR y modos deslizantes:

- **Controlador LQR:** Diseño del regulador cuadrático lineal para optimizar el desempeño del sistema, minimizando un índice de costo cuadrático. Se ajustan los parámetros del controlador para lograr un equilibrio entre rendimiento y estabilidad.
- **Controlador por Modos Deslizantes:** Implementación del controlador por modos deslizantes para mejorar la robustez frente a perturbaciones y variaciones en el modelo del sistema. Se diseñan las superficies de deslizamiento y se asegura la alcanzabilidad robusta.
- **Integración del Controlador Híbrido:** Combinación de las técnicas de control LQR y modos deslizantes en un enfoque híbrido. Se realizan simulaciones para ajustar los parámetros del controlador y optimizar su desempeño.

9.2 Implementación y Validación Experimental

9.2.1 Implementar y validar el controlador híbrido en un entorno de simulación y en experimentos en tiempo real:

- **Simulaciones:** Realización de simulaciones exhaustivas utilizando software de modelado y simulación (e.g., MATLAB/Simulink). Se evalúa el desempeño del

controlador bajo diversas condiciones de operación y se comparan los resultados con otros controladores tradicionales.

- **Experimentación en Tiempo Real:** Implementación del controlador híbrido en una plataforma experimental de laboratorio. Se llevan a cabo experimentos para validar la efectividad del controlador en la estabilización del PIR. Se introducen perturbaciones controladas para evaluar la robustez del sistema.

- **Evaluación de Desempeño:** Medición y análisis de parámetros de desempeño clave, como la estabilidad, la respuesta transitoria y la robustez frente a perturbaciones. Se documentan los resultados y se comparan con los obtenidos en las simulaciones.

9.2.2 Comparar el rendimiento del controlador híbrido con otras metodologías de control:

- **Estudios Comparativos:** Realización de estudios comparativos entre el controlador híbrido propuesto y otros enfoques de control (e.g., PID, LQR, modos deslizantes). Se utilizan métricas de rendimiento específicas para evaluar la eficiencia y robustez de cada metodología.

- **Análisis Crítico:** Análisis crítico de las fortalezas y debilidades de cada técnica de control. Se identifican las áreas de mejora y se proponen recomendaciones para futuras investigaciones y aplicaciones.

- **Documentación y Presentación de Resultados:** Elaboración de informes detallados que describen los métodos utilizados, los resultados obtenidos y las conclusiones derivadas del estudio. Se presentan los hallazgos en conferencias y publicaciones científicas para contribuir al avance del conocimiento en el campo del control de sistemas no lineales.

9.3 Control de modo deslizante basado en LQR

El concepto fundamental subyacente en el controlador de modo deslizante basado en LQR propuesto radica en obtener un control óptimo del sistema, eludiendo la fase de alcanzabilidad no robusta inherente al controlador de modo deslizante convencional. Este objetivo se logra imponiendo un modo deslizante desde el estado inicial de la respuesta del sistema, lo que asegura la robustez del controlador frente a incertidumbres coincidentes durante toda la respuesta del sistema.

En el diseño de este controlador propuesto, se asume que ya existe un controlador nominal LQR, previamente diseñado para la planta nominal, garantizando tanto la estabilidad asintótica como el rendimiento del sistema predefinido.

Para preservar este rendimiento nominal y, al mismo tiempo, asegurar insensibilidad a perturbaciones externas e incertidumbres ajustadas, se fusiona un controlador de modo deslizante discontinuo con el controlador nominal LQR. En el diseño del controlador de modo deslizante basado en LQR propuesto, inicialmente se proyecta un controlador nominal LQR, basado en la suposición de que la descripción de la planta nominal se proporciona como se especifica en la ecuación (7). El espacio de estados que representa el sistema de la planta nominal se define de la siguiente manera:

Ecuación 7. Representación del Sistema en el Espacio de Estados para el Controlador LQR

Nominal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (7)$$

Donde $x(t)$ denota un vector que describe el estado del sistema en el tiempo (t) , mientras que (t) representa un vector que encapsula las entradas aplicadas en el mismo instante de tiempo.

Las matrices A y B son matrices que modelan la dinámica del sistema. El controlador LQR opera con el objetivo de minimizar una función de costo específica, definida en la ecuación (8). La función de costo asociada con el controlador LQR se formula de la siguiente manera:

Ecuación 8. Función de Costo del Controlador LQR

$$J_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt$$

En la ecuación presentada, $\mathbf{e}(t) = X_{des}(t) - X(t)$ representa el error entre el vector de estado deseado $X_{des}(t)$ y el vector de estado medido $X(t)$. Las matrices de ponderación de estado $\mathbf{Q}$ y la matriz de costo de control $\mathbf{R}$ son parámetros definidos por el usuario que influyen significativamente en el rendimiento del controlador. La salida del controlador puede expresarse de la siguiente manera:

Ecuación 9. Salida del Controlador LQR

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{e}(t) = \mathbf{K} (X_{des}(t) - X(t)) \quad (9)$$

donde $\mathbf{K}$ representa la matriz de retroalimentación de estado, que puede expresarse de la siguiente manera:

Ecuación 10. Matriz de Retroalimentación de Estado del Controlador LQR

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (10)$$

donde $\mathbf{P}$ se obtiene resolviendo la ecuación algebraica de Riccati, dada por:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Así, la matriz de retroalimentación de estado $\mathbf{K}$ depende de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$, donde las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dependen del sistema en consideración, mientras que las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son seleccionadas por el usuario basado en criterios deseados. La matriz de ponderación de estado $\mathbf{Q}$ se define como:

Ecuación 11. Matrices de Ponderación de Estado y de Costo de Control del LQR

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{R}=1$$

Además, después del diseño de un controlador LQR, se integra un controlador de modo deslizante discontinuo con el controlador LQR para mitigar el impacto de las incertidumbres paramétricas y las perturbaciones de entrada. La dinámica de la planta con incertidumbres y perturbaciones de entrada se representan de la siguiente manera:

Ecuación 12. Ecuación de Estado con Perturbaciones del Sistema Controlado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

El término adicional $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ en (12) representa la dinámica no modelada de la planta y la perturbación de entrada, que satisface la condición de coincidencia dada por:

Ecuación 13. Representación de Perturbaciones en el Sistema de Estado

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}d_m \quad (13)$$

Donde d_m denota una perturbación acotada en la entrada con algún valor máximo conocido.

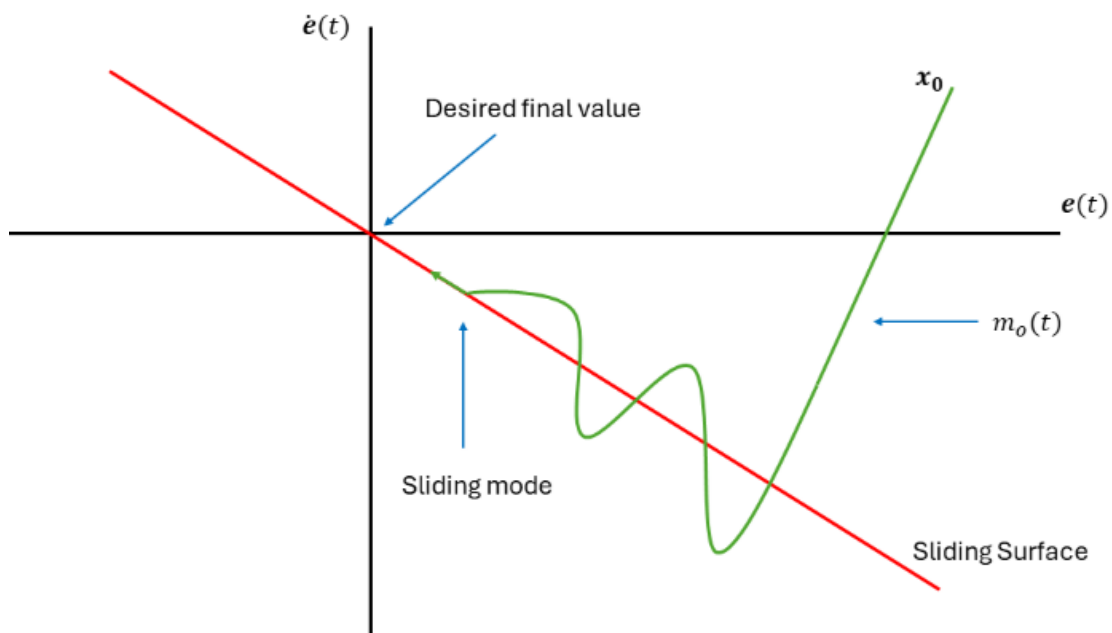


Figure 4 - Presenta la interpretación gráfica de SMC para LQR en el péndulo invertido rotatorio.

La entrada de control para el sistema en (11) se da como:

Ecuación 14. Composición de la Entrada de Control del Sistema

$$u = u_n + u_d \quad (14)$$

Donde u_n representa la entrada de control nominal proporcionada por el controlador LQR y u_d representa la entrada de control discontinua proporcionada por el controlador de modo deslizante. Al sustituir el valor de u en (14) en (12), la dinámica de la planta puede representarse como:

Ecuación 15. Dinámica del Sistema con Control Nominal y Control Discontinuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_n(t) + Bu_d(t) + d_m \quad (15)$$

La superficie deslizante para el controlador de modo deslizante se define como:

Ecuación 16. Definición de la Superficie Deslizante para el Controlador de Modo Deslizante

$$s(t) = GX(t) + z(t) \quad (16)$$

Donde G es una matriz definida por el usuario. Durante el deslizamiento, $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ y, por lo tanto:

Ecuación 17. Condiciones de Deslizamiento para el Controlador de Modo Deslizante

$$\dot{s}(t) = G\dot{X}(t) + \dot{z}(t) = 0 \quad (17)$$

Reemplazando el valor de $\dot{x}(t)$ de (15) en (17), obtenemos:

Ecuación 18. Dinámica de la Superficie Deslizante en Presencia de Perturbaciones

$$\dot{s}(t) = G(Ax(t) + Bu_n(t) + Bu_d(t) + d_m) + \dot{z}(t) = 0 \quad (18)$$

La superficie deslizante híbrida que elimina la fase de alcanzabilidad se da como:

Ecuación 19. Superficie Deslizante Híbrida para la Eliminación de la Fase de Alcanzabilidad

$$s(t) = \mathbf{G} \left\{ \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0) - \int_0^t (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_n(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t) + d_m) dt \right\} \quad (19)$$

La teoría matemática subyacente en el controlador deslizante basado en LQR propuesto radica en obtener un control óptimo del sistema, evitando la fase de alcanzabilidad no robusta inherente al controlador deslizante convencional. Este objetivo se logra imponiendo un modo deslizante desde el estado inicial de la respuesta del sistema, lo que garantiza la robustez del controlador frente a incertidumbres coincidentes durante toda la respuesta del sistema.

En el diseño de este controlador propuesto, se asume que ya existe un controlador nominal LQR, previamente diseñado para la planta nominal, que garantiza tanto la estabilidad asintótica como el rendimiento del sistema predefinido. Para preservar este rendimiento nominal y al mismo tiempo garantizar insensibilidad a perturbaciones externas e incertidumbres ajustadas, se fusiona un controlador deslizante discontinuo con el controlador nominal LQR.

En el diseño del controlador deslizante basado en LQR propuesto, inicialmente se proyecta un controlador nominal LQR, basado en la suposición de que la descripción de la planta nominal se proporciona como se especifica en la ecuación (7). Se implementa en Matlab para la simulación (ver Figura 4).

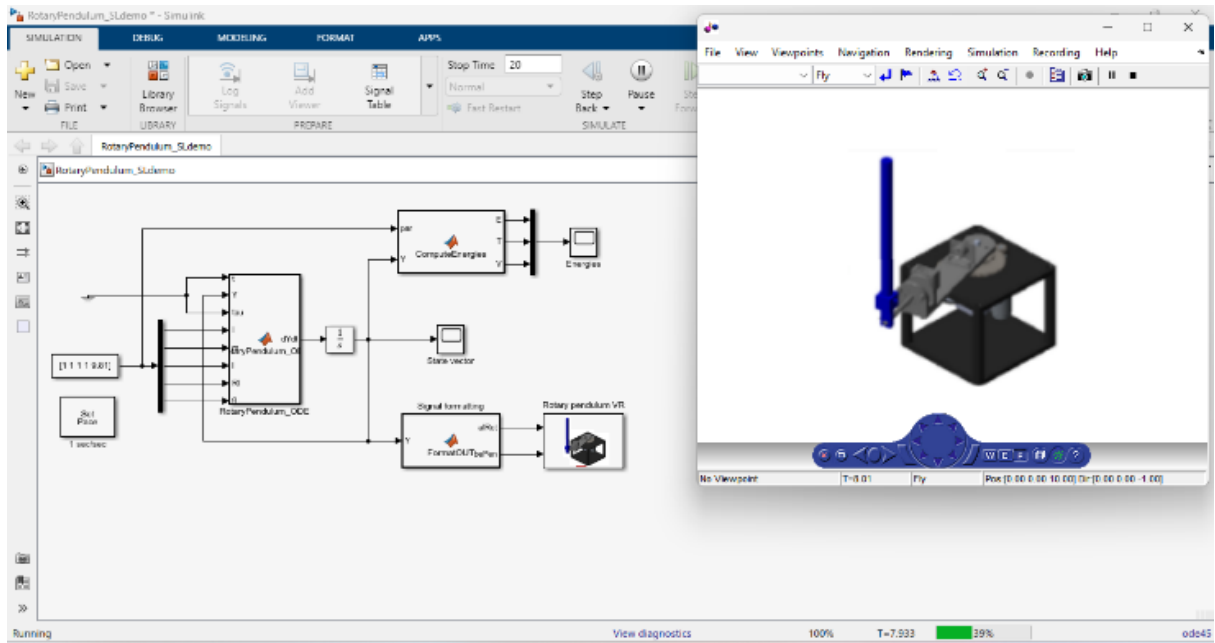


Figura 5 - Diagrama de bloques de Simulink del LQR-SMC propuesto en el péndulo invertido rotatorio

10 Resultados

En esta sección, se discuten los resultados de la simulación e implementación del péndulo invertido rotatorio. Se destaca que la velocidad angular muestra una mayor variabilidad en comparación con otras variables, lo que sugiere posibles complejidades en la dinámica rotacional del péndulo. Se estudia la respuesta del sistema a varias formas de onda de referencia, observando cómo las variaciones en la amplitud afectan el equilibrio del motor y, por ende, la estabilidad del péndulo (ver Figura 5).

Además, se resalta la importancia de considerar la dinámica del péndulo real al interpretar los resultados de la simulación, especialmente en el contexto del control del sistema frente a diferentes movimientos de referencia.

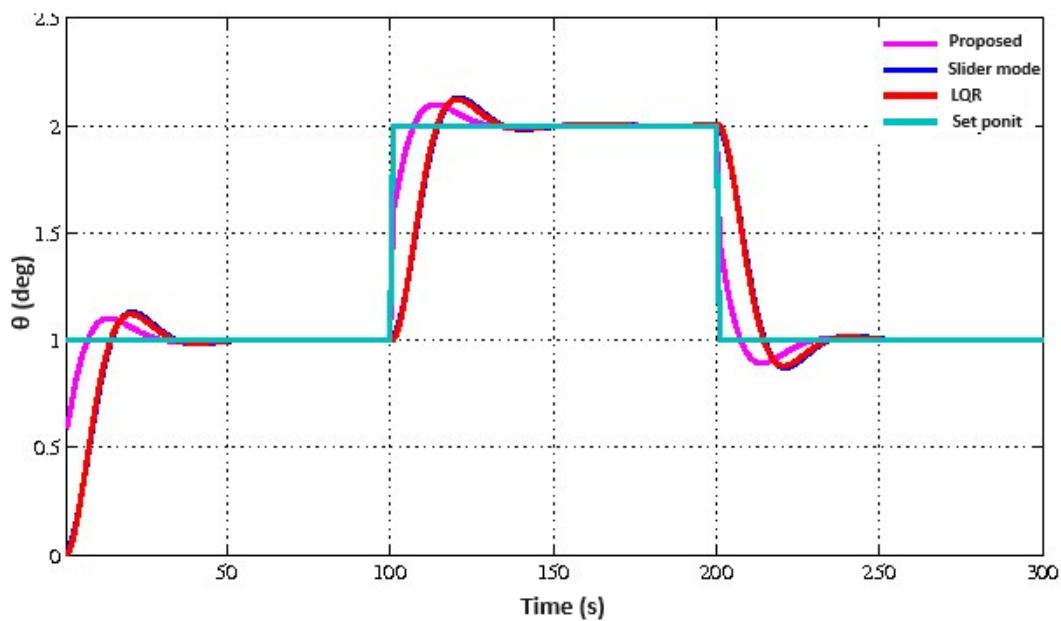


Figure 6 - Respuesta de los diferentes controladores aplicados al péndulo invertido rotatorio.

La Figura 6 muestra el comportamiento de la energía total, la energía cinética y la energía potencial. En esta figura, representamos mediante una línea azul la energía total (TE), suma de la energía potencial (EP) y la energía cinética (EK). El principio de conservación de la energía establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial es constante.

Así, la energía cinética es máxima cuando la energía potencial es mínima (cuando el péndulo pasa por la posición de equilibrio estable), y la energía cinética es mínima (cero) cuando el péndulo alcanza la máxima deflexión. La energía total tiene una media de 4.88049 Joules y una desviación estándar de 1.097×10^{-3} .

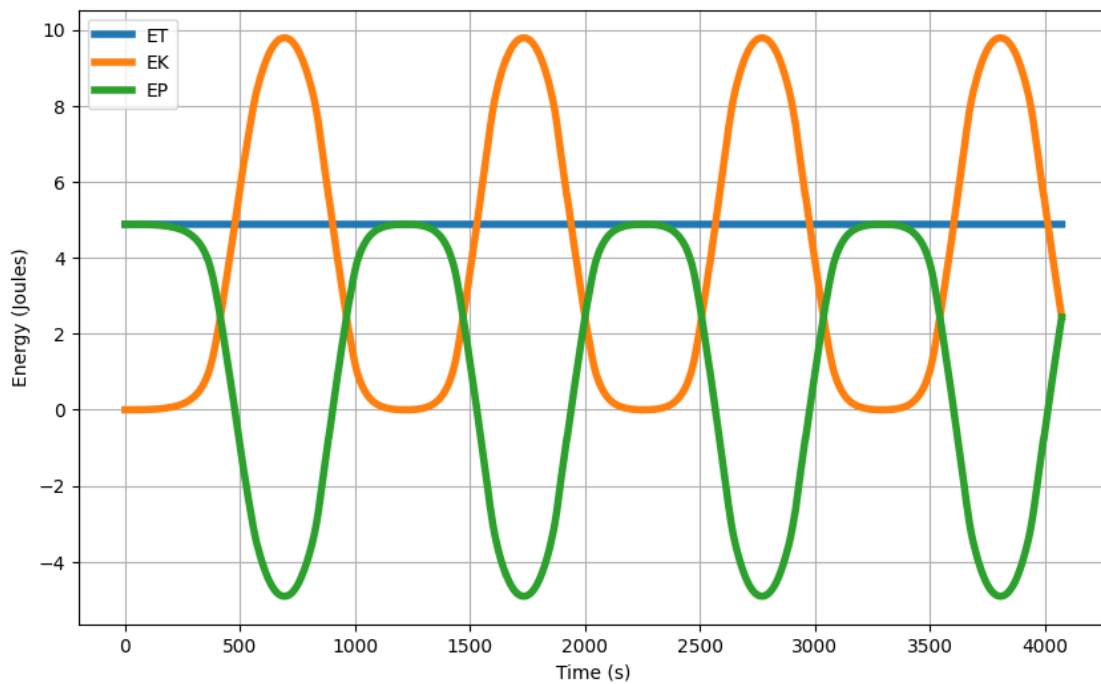


Figure 7 - Comportamiento de la energía en el péndulo invertido rotatorio.

La Figura 7 representa el vector de estado $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$ respectivamente. Donde X1 es θ , X2 es α , X3 es $\dot{\theta}$ y X4 es $\dot{\alpha}$. Comparando las medias de las variables, se observa que el

ángulo de inclinación X_1 tiene una media cercana a cero (-0.0288), lo que sugiere que el péndulo tiende a estar erguido.

Sin embargo, la velocidad angular X_2 tiene una media muy cercana a cero (-0.0067), indicando que el péndulo tiende a estar prácticamente en reposo en términos de rotación. Por otro lado, las tasas de cambio del ángulo de inclinación X_3 y la velocidad angular X_4 tienen medias positivas (2.9939 y 0.0359 respectivamente), lo que sugiere que el péndulo está en movimiento y experimenta cambios en su posición y velocidad angular.

En cuanto a las desviaciones estándar, se observa que la variable X_2 , que representa la velocidad angular, tiene una desviación estándar relativamente alta (0.9383), lo que indica una variabilidad significativa en la velocidad angular del péndulo entre las diferentes observaciones.

Por otro lado, las otras variables tienen desviaciones estándar más bajas, lo que sugiere menor variabilidad en sus valores en comparación con la velocidad angular. Esto podría implicar que, aunque el péndulo pueda experimentar cambios en su posición y velocidad angular, estos cambios pueden no ser tan grandes o pronunciados en comparación con la velocidad angular.

El sistema bajo estudio implica controlar un motor para seguir una referencia mientras se mantiene un péndulo en equilibrio. Se analiza el comportamiento del sistema frente a diferentes tipos de referencias. Se observa que las variaciones en la amplitud de la onda de referencia afectan la capacidad del motor para mantener el equilibrio del péndulo. Se muestra

que las referencias de gran amplitud comprometen la estabilidad del péndulo debido a las limitaciones inherentes al tamaño y la dinámica del sistema.

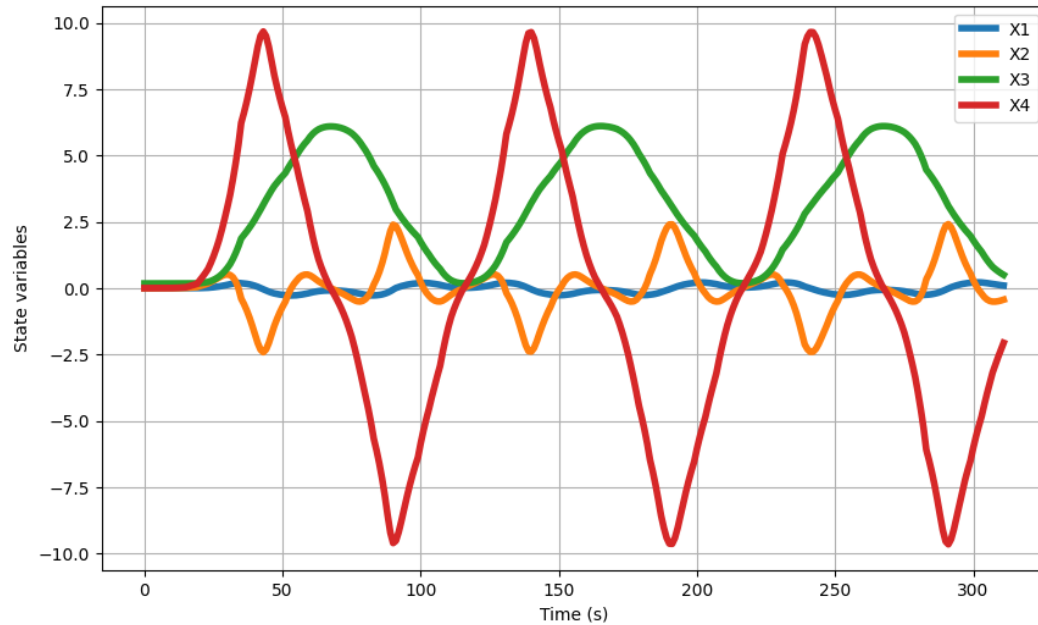


Figure 8 - Los valores de los estados se observan comparando sus resultados en los dos controladores FLC y LQR.

Se investiga el comportamiento del sistema bajo diferentes formas de onda de referencia, destacando la capacidad del motor para seguir una onda sinusoidal con mayor estabilidad que una onda cuadrada. Se discute cómo la naturaleza del movimiento de referencia influye en la capacidad del sistema para mantener el equilibrio del péndulo, subrayando la importancia de considerar las características específicas del péndulo real en la interpretación de los resultados obtenidos en la simulación.

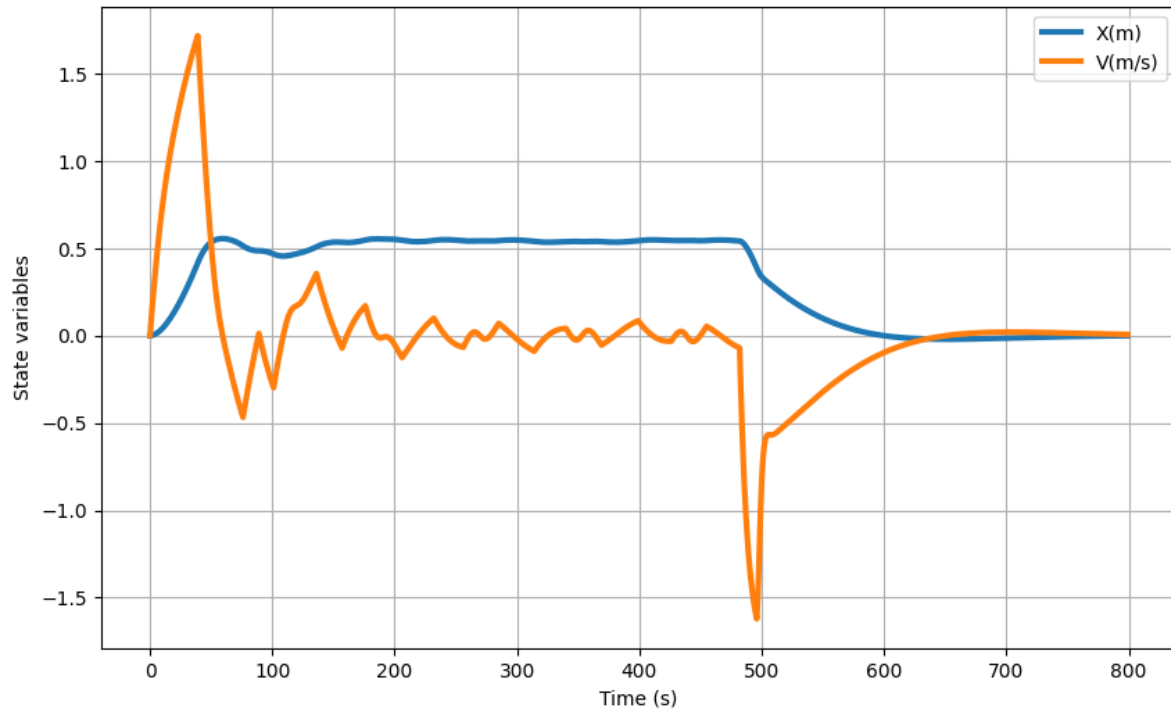


Figure 9 - Comportamiento de la distancia y la velocidad del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

El análisis descriptivo en la Figura 8 revela las propiedades de las dos variables asociadas con un sistema de péndulo invertido rotatorio.

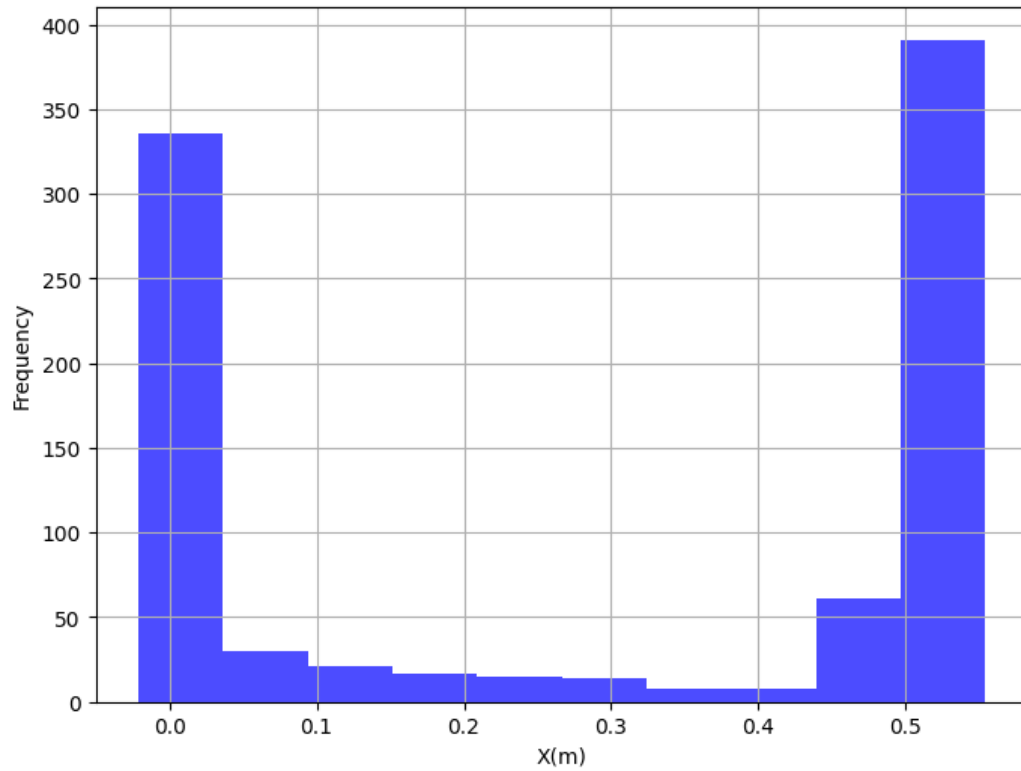


Figure 10 - Histograma de la variable $X(m)$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

La Figura 9 muestra el histograma de la variable $X(m)$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante. En el que se denota la posición del péndulo, exhibe una media de 0.287831 metros y una desviación estándar de 0.254823 metros.

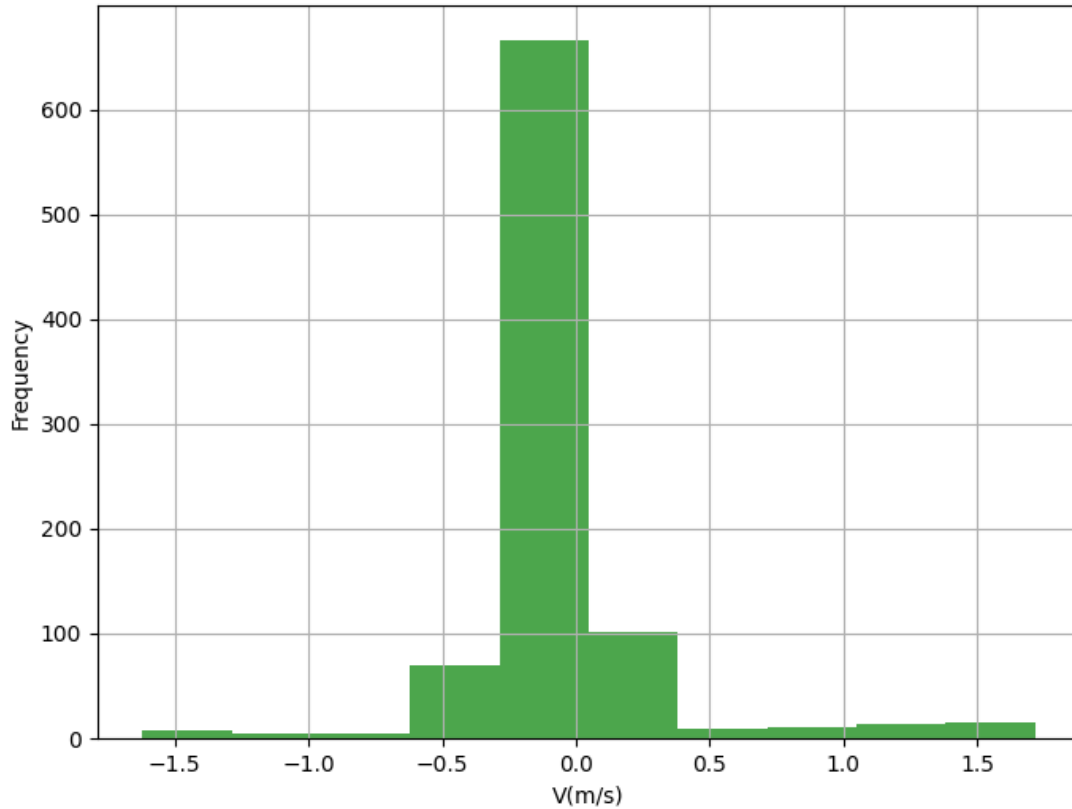


Figure 11 - Histograma de la variable $V(m)$ del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

En la Figura 10, respecto a la velocidad del péndulo, representada por $V(m/s)$, se observa una media prácticamente nula de 0.000054 metros por segundo, con una desviación estándar de 0.354987 metros por segundo. Los valores mínimos registrados para la posición y la velocidad son -0.021321 metros y -1.621257 metros por segundo, respectivamente.

La Figura 11 describe dos variables asociadas con un péndulo invertido rotatorio. La variable $\theta(\text{grados})$ representa la posición angular del péndulo, con una media de 3.221043 grados y una desviación estándar de 1.333621 grados. La velocidad angular del péndulo, denotada por $\omega(\text{grados/s})$, tiene una media de -0.350545 grados por segundo y una desviación

estándar de 5.093703 grados por segundo. Los valores mínimos registrados para la posición angular y la velocidad angular son 0.009431 grados y -12.414140 grados por segundo, respectivamente.

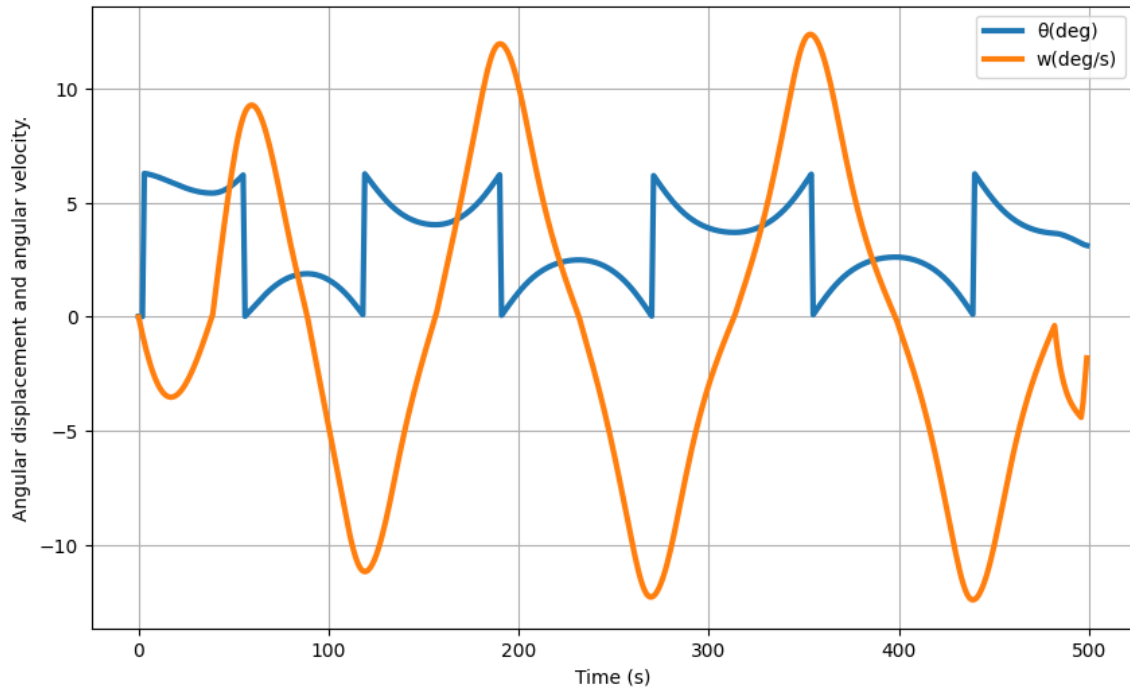


Figure 12 - Comportamiento de la distancia y la velocidad angulares del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

La Figura 12 muestra que el 25% de los datos tienen una posición angular igual o menor a 2.606192 grados y una velocidad angular igual o menor a -2.047480 grados por segundo. Mientras que el 75% de los datos tienen una posición angular igual o menor a 3.776722 grados y una velocidad angular igual o menor a 0.051968 grados por segundo (ver Figura 13). Los valores máximos observados para la posición y la velocidad angulares son 6.283108 grados y 12.379188 grados por segundo, respectivamente.

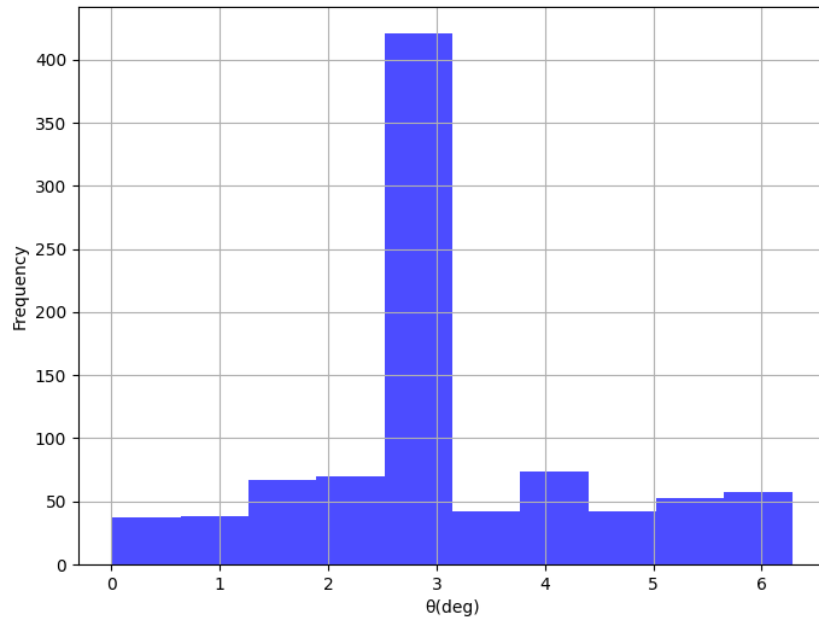


Figure 13 - Histograma de la variable θ (grados) del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

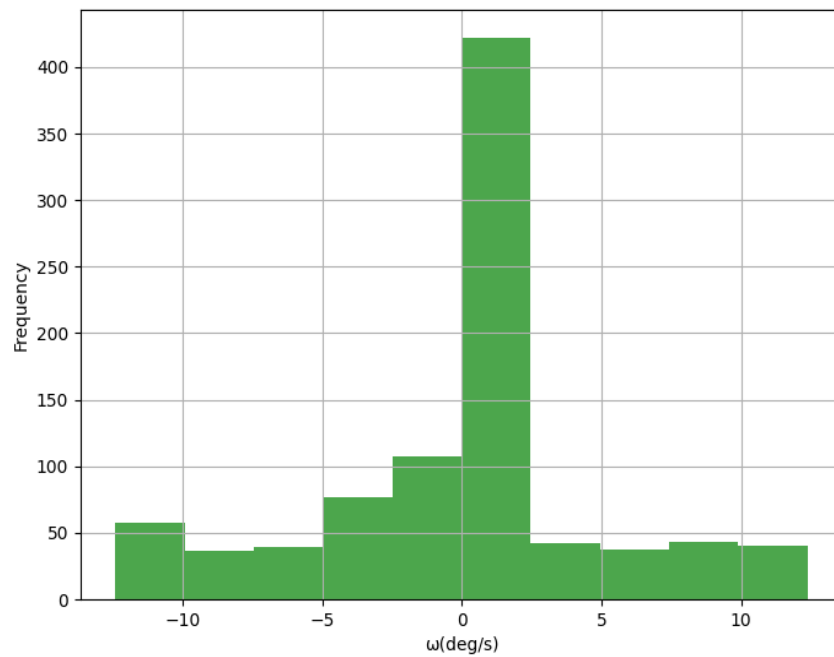


Figure 14 - Histograma de la variable ω (grados) del péndulo invertido rotatorio con control LQR utilizando el modo deslizante.

11 Conclusiones

En este estudio, se ha desarrollado y validado un controlador de modo deslizante basado en LQR para abordar el complejo problema de la estabilización de un péndulo invertido rotatorio. La implementación de este controlador tiene como objetivo principal proporcionar un rendimiento robusto superior al de los controladores convencionales.

El enfoque híbrido propuesto combina las ventajas del Regulador Cuadrático Lineal (LQR) en términos de rendimiento óptimo y del controlador de modo deslizante en términos de robustez. A través de un riguroso proceso de diseño y validación, se ha demostrado que este controlador híbrido es capaz de manejar las fases de incertidumbre y alcanzabilidad de manera más efectiva que los controladores de modo deslizante convencionales.

Los resultados experimentales y de simulación del controlador propuesto se compararon con los obtenidos utilizando un controlador LQR convencional. Los datos evidencian que el controlador de modo deslizante basado en LQR no solo mejora el rendimiento en condiciones ideales, sino que también mantiene una robustez superior bajo condiciones de incertidumbre. En particular, se ha observado que la variable de velocidad angular (ω) presenta una desviación estándar considerablemente alta, de 5.093703 grados por segundo. Esta variabilidad significativa indica que el péndulo experimenta cambios drásticos en su velocidad rotacional entre diferentes observaciones, lo que subraya la complejidad inherente a la dinámica del sistema y la necesidad de controladores avanzados que puedan adaptarse a estas fluctuaciones.

El análisis de la variable de velocidad angular $\dot{X}_2$ revela una desviación estándar elevada de 0.9383, lo que refuerza la observación de variabilidad significativa en la velocidad angular del péndulo. Comparativamente, las otras variables de estado presentan desviaciones estándar más bajas, lo que sugiere que los cambios en la posición y velocidad angular del péndulo son menos pronunciados. Este comportamiento diferencial en las variables de estado pone de manifiesto la importancia de un diseño de control que pueda gestionar eficazmente las dinámicas variables y no lineales del sistema, asegurando la estabilidad y robustez necesarias para el funcionamiento óptimo del péndulo invertido rotatorio.

Los resultados obtenidos subrayan la eficacia del controlador híbrido en términos de mitigación de las perturbaciones y mantenimiento de la estabilidad del sistema. La capacidad del controlador de manejar las variaciones en la velocidad angular sin comprometer la estabilidad del sistema es una ventaja significativa, especialmente en aplicaciones donde la precisión y la respuesta rápida son cruciales. La robustez del controlador propuesto se valida adicionalmente mediante pruebas experimentales, que demuestran su capacidad para mantener el rendimiento incluso en presencia de perturbaciones externas significativas.

En conclusión, la investigación presenta una contribución sustancial al campo de la teoría de control y la ingeniería de sistemas dinámicos. El desarrollo de un controlador de modo deslizante basado en LQR para el péndulo invertido rotatorio ofrece una solución innovadora que combina rendimiento óptimo y robustez, superando las limitaciones de los enfoques convencionales. Los hallazgos de este estudio no solo proporcionan una base sólida para futuras investigaciones en controladores híbridos, sino que también tienen implicaciones

prácticas para el diseño de sistemas de control robustos en aplicaciones reales, mejorando significativamente la estabilidad y eficiencia de sistemas complejos y no lineales.

12 Referencias

- [1] Setiawan, N., & Pratama, G. N. P. (2021, November). Application of LQR Full-State Feedback Controller for Rotational Inverted Pendulum. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2111, No. 1, p. 012006). IOP Publishing.
- [2] Önen, Ü., & Çakan, A. (2021). Multibody modeling and balance control of a reaction wheel inverted pendulum using lqr controller. *International Journal of Robotics and Control Systems*, 1(1), 84-89.
- [3] Bekkar, B., & Ferkous, K. (2023). Design of Online Fuzzy Tuning LQR Controller Applied to Rotary Single Inverted Pendulum: Experimental Validation. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 48(5), 6957-6972.
- [4] Rojas, J. H. C., Serrezuela, R. R., López, J. A. Q., & Perdomo, K. L. R. (2016). LQR hybrid approach control of a robotic arm two degrees of freedom. *International Journal of Applied Engineering Research*, 11(17), 9221-9228.
- [5] Bajrami, X., Pajaziti, A., Likaj, R., Shala, A., Berisha, R., & Bruqi, M. (2021). Control theory application for swing up and stabilisation of rotating inverted pendulum. *Symmetry*, 13(8), 1491.
- [6] Nguyen, C. X., Tran, T. T., Pham, T. X., & Le, K. M. (2021). Design of control laws for rotary inverted pendulum based on LQR and Lyapunov function. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1029, No. 1, p. 012021). IOP Publishing.
- [7] Hazem, Z. B., Fotuhi, M. J., & Bingül, Z. (2020). Development of a Fuzzy-LQR and Fuzzy-LQG stability control for a double link rotary inverted pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, 357(15), 10529-10556.

- [8] Sanjeewa, S. D., & Parnichkun, M. (2022). Control of rotary double inverted pendulum system using LQR sliding surface based sliding mode controller. *Journal of Control and Decision*, 9(1), 89-101.
- [9] Lucci, C., Marra, M., Huertas-Leyva, P., Baldanzini, N., & Savino, G. (2021). Investigating the feasibility of motorcycle autonomous emergency braking (MAEB): Design criteria for new experiments to field test automatic braking. *MethodsX*, 8, 101225.
- [10] Chacko, S. J., & Abraham, R. J. (2023). On LQR controller design for an inverted pendulum stabilization. *International Journal of Dynamics and Control*, 11(4), 1584-1592.
- [11] Vo, M. T., Duong, H. N., & Nguyen, V. H. (2023). Combining passivity-based control and linear quadratic regulator to control a rotary inverted pendulum. *Journal of Robotics and Control (JRC)*, 4(4), 479-490.
- [12] Nghi, H. V., Nhien, D. P., & Ba, D. X. (2022). A lqr neural network control approach for fast stabilizing rotary inverted pendulums. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 23, 45-56.
- [13] Mehedi, I. M., Ansari, U., Bajodah, A. H., AL-Saggaf, U. M., Kada, B., & Rawa, M. J. (2020). Underactuated rotary inverted pendulum control using robust generalized dynamic inversion. *Journal of Vibration and Control*, 26(23-24), 2210-2220.
- [14] Huynh, X. D., Nguyen, T. D., Nguyen, D. T., Hoang, D. B., & Pham, M. H. (2022). LQR CONTROL FOR DOUBLE-LINKED ROTARY INVERTED PENDULUM: SIMULATION AND EXPERIMENT. *Robotica & Management*, 27(1).
- [15] Shala, E., Bajrami, X., Likaj, R., & Pajaziti, A. Real Time Swinging Up and Stabilizing a Double Inverted Pendulum Using PID-LQR. *Strojnícky časopis-Journal of Mechanical Engineering*, 73(1), 159-168.

- [16] Montiel, J. J. G., Chávarro, A. F. C., Camacho, C. A. P., & Serrezuela, R. R. (2018). Design and Implementation of an Optimal Hybrid Control for a Hydraulic System of Coupled Tanks. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(10). pp 3481-3488.
- [17] Nguyen, N. P., Oh, H., Kim, Y., & Moon, J. (2021). A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum. *Nonlinear Dynamics*, 104, 1117-1137.
- [18] Hazem, Z. B., Fotuhi, M. J., & Bingül, Z. (2023). A study of anti-swing fuzzy LQR control of a double serial link rotary pendulum. *IETE Journal of Research*, 69(6), 3443-3454.
- [19] Saleem, O., Abbas, F., & Iqbal, J. (2023). Complex fractional-order LQIR for inverted-pendulum-type robotic mechanisms: design and experimental validation. *Mathematics*, 11(4), 913.
- [20] Ben Hazem, Z., & Bingül, Z. (2023). A comparative study of anti-swing radial basis neural-fuzzy LQR controller for multi-degree-of-freedom rotary pendulum systems. *Neural Computing and Applications*, 1-17.
- [22] Borrás Pinilla, C., & González Díaz, A. J. (2021, November). On the Dynamics and Optimal Control of the Rotational Inverted Pendulum. In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (Vol. 85628, p. V07BT07A040). American Society of Mechanical Engineers.
- [23] Escalante, F. M., Jutinico, A. L., Terra, M. H., & Siqueira, A. A. (2023). Robust linear quadratic regulator applied to an inverted pendulum. *Asian Journal of Control*, 25(4), 2564-2576.

- [24] Oscar Andres Otalora Castro, Jorge Luis Aroca Trujillo, Miguel Angel Tovar Cardozo and Ruthber Rodriguez Serrezuela, 2019. Design and Construction of a Four-Degree Freedom Robot with PID Controller. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 14: 9583-9591.
- [25] Serrezuela, R. R., Cardozo, M. Á. T., Montiel, J. J. G., Zamora, R. S., & Reyes, E. M. (2019, August). Análisis comparativo entre de MAE y RNA en señales de EMG obtenidas para control de una prótesis mano robótica. In *Memorias de Congresos UTP* (pp. 107-112).
- [26] Serrezuela, R. R., & Chavarro, A. F. C. (2016). Multivariable control alternatives for the prototype tower distillation and evaporation plant. *International Journal of Applied Engineering Research*, 11(8), 6039-6043.
- [27] Serrezuela, R. R., Cardozo, M. Á. T., Ardila, D. L., & Perdomo, C. A. C. (2018). A consistent methodology for the development of inverse and direct kinematics of robust industrial robots. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(01), 293-301.
- [28] Perdomo, J. G. J., Perdomo, C. A. C., Camacho, C. A. P., & Serrezuela, R. R. (2006). A Novel Model of Optimal Hybrid Control in a Space Vector Modulation SVM for Voltage Source Inverter Control. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(10), 3418-3425.
- [31] Shyu, K. K., & Yan, J. J. (2000). Robust tracking control of uncertain nonlinear systems using adaptive sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(6), 1208-1213.
- [32] Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- [33] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- [34] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons.

- [35] Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems. Springer Science & Business Media.